Hoja 2 de Problemas
(Espacios Vectoriales)

1. [Espacios Vectoriales Prototipo] Demostrar que los espacios vectoriales prototipo, del Resumen de Espacios Vectoriales, son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

2. Demostrar o refutar la siguientes afirmaciones

   a) $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

   b) $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   c) $\mathbb{Q}_n[t]$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

3. [Bases canónicas y dimensión] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo.

   a) Demostrar que:
   - $\{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$; a esta base se le llama <u>base canónica de $\mathbb{K}^n$</u>.
   - $\dim(\mathbb{K}^n)=n$.

   b) Demostrar que:
   - $$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right\}$$
     es una base de $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$; a esta base se le llama <u>base canónica de</u> $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
   - $\dim(\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}))=mn$.

   c) Demostrar que:
   - $\{1,t,\dots,t^n\}$ es una base de $\mathbb{K}_n[t]$; a esta base se le llama <u>base canónica de</u> $\mathbb{K}_n[t]$.
   - $\dim(\mathbb{K}_n[t])=n+1$.

4. Demostrar que $\mathbb{K}[t]$, con $\mathbb{K}$ cuerpo, y $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, son espacios vectoriales de tipo infinito.

5. Determinar el número de vectores en $(\mathbb{Z}_p)_n[t]$, donde p es primo.

6. [Espacio Vectorial Producto] Sean $\mathscr{V}_i$, $i=1,\dots,n$, espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de tipo finito. Sea $\mathscr{B}_i=\{u_{i,1},\dots,u_{i,r_i}\}$, una base de $\mathscr{V}_i$ para $i=1,\dots,n$. Demostrar que

$$\mathscr{B}=\{\begin{array}{lll} (u_{1,1},\overline{0},\dots,\overline{0}), & \dots, & (u_{1,r_1},\overline{0},\dots,\overline{0}),\\ (\overline{0},u_{2,1},\dots,\overline{0}), & \dots, & (\overline{0},u_{2,r_2},\dots,\overline{0}),\\ \vdots & & \vdots\\ (\overline{0},\overline{0},\dots,u_{n,1}), & \dots, & (\overline{0},\overline{0},\dots,u_{n,r_n})\} \end{array}$$

   es una base $\mathscr{V}_1\times\cdots\times\mathscr{V}_n$. Cuando los espacios $\mathscr{V}_i$ tienen bases canónicas, la base $\mathscr{B}$ se llama <u>base canónica de $\mathscr{V}_1\times\cdots\times\mathscr{V}_n$.</u>

7. Determinar la base canónica de $(\mathbb{R}_1[t])^2\times\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})^2$.

8. Dar bases de los siguientes espacios vectoriales productos

   a) $\mathbb{R}_2[t] \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$
   b) $(\mathbb{Z}_2)_2[t]^2 \times \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2)$
   c) $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}_3[t]^2$
   d) $\mathbb{C}^3 \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

9. [Subespacios Vectoriales en $\mathbb{K}^n$] Analizar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales y para aquellos que lo sean calcular una base y su dimensión.

   a) $\mathscr{W} = \{(x,0,z)/x,z \in \mathbb{R}\}$
   b) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/x,y,z \in \mathbb{Z}\}$
   c) $\mathscr{W} = \{(x,x,-x)/x \in \mathbb{R}\}$
   d) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/x+y+z=a\}$, $a \in \mathbb{R}$
   e) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/xy=a\}$, $a \in \mathbb{R}$
   f) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2=a\}, a \in \mathbb{R}$
   g) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/x,y,z \notin \mathbb{Z}\}$
   h) $\mathscr{W} = \mathbb{Q}^3$
   i) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/z=0\}$
   j) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/x=y=z\}$
   k) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/x=y \text{ ó } x=z\}$
   l) $\mathscr{W} = \{(x,y,z)/x^2-y^2=0\}$

10. [Subespacios Vectoriales en $\mathbb{K}_n[t]$] Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[\,t\,]$ y para aquellos que lo sean calcular una base y su dimensión.

    a) $\mathscr{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[\,t\,]\,/\,3p(0)+p(1)=1\}$
    b) $\mathscr{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[\,t\,]\,/\,p'(0)+p''(0)=0\}$
    c) $\mathscr{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[\,t\,]\,/\,(t-1) \text{ divide a } p(t)\}$
    d) $\mathscr{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[\,t\,]\,/\,p(0)=p'(0)=0\}$

11. [Subespacios Vectoriales en $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$] Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y para aquellos que lo sean calcular una base y su dimensión.

    a) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/\det(M)=0\}$
    b) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/\det(M)\neq 0\}$
    c) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/M=M^T\}$
    d) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/M=-M^T\}$
    e) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/M \text{ es triang. superior}\}$
    f) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/M \text{ es triang. inferior}\}$
    g) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/M \text{ es diagonal}\}$
    h) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/M\cdot M^T=I\}$
    i) $\mathscr{W} = \{M \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/\text{Traza}(M)=0\}$
    j) $\mathscr{W} = \{(a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 a_{i,j}=0\}$
    k) $\mathscr{W} = \{(a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})/\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 a_{i,j}^2=0\}$
    l) $\mathscr{W} = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.

12. [Subespacios Vectoriales en $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$] Estudiar cuales de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, con el intervalo I indicado en cada caso.

    a) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})\,/\,f \text{ continua en } [a,b]\}$
    b) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}((a,b),\mathbb{R})\,/\,f \text{ derivable en } (a,b)\}$
    c) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}((a,b),\mathbb{R})\,/\,f \text{ integrable en } (a,b)\}$
    d) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}((-a,a),\mathbb{R})\,/\,f \text{ par}\}$
    e) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}((-a,-a),\mathbb{R})\,/\,f \text{ impar}\}$
    f) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,/\,f(3)=0\}$
    g) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,/\,f(1)=f(2)\}$
    h) $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{F}((a,b),\mathbb{R})\,/\,f \text{ creciente en (a,b)}\}$

13. Sea $\mathscr{V}$ el conjunto de todas las sucesiones reales.

    a) Demostrar que $\mathscr{V}$, con la suma usual de sucesiones y con la multiplicación usual por escalares, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
    b) Demostrar que el conjunto de todas las sucesiones reales convergentes es un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$.

14. Estudiar si el conjunto de todas las series reales convergentes, con la suma usual de series y con la multiplicación usual por escalares, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

15. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones. Sea $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ un espacio vectorial finito dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\mathscr{W}$ un s.v. de $\mathscr{V}$:

    a) $\overline{0} \in \mathscr{W}$.
    b) $\mathscr{W} \setminus \{\overline{0}\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$.
    c) Sea $u \in \mathscr{V}$ entonces $\mathscr{V} \setminus \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ es un subespacio vectorial de V.
    d) Si $A \subset B \subset \mathscr{V}$ entonces $L(A) \subset L(B)$.
    e) Sean $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2$ s.v. de $\mathscr{V}$ tales que $\dim(\mathscr{W}_1) \leq \dim(\mathscr{W}_2)$, entonces $\mathscr{W}_1 \subset \mathscr{W}_2$.
    f) Sean $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2$ s.v. de $\mathscr{V}$ tales que $\mathscr{W}_1 \subset \mathscr{W}_2$, entonces $\dim(\mathscr{W}_1) \leq \dim(\mathscr{W}_2)$

16. [Coordenadas] En cada apartado, estudiar si $\mathscr{B}$ es una base de $\mathscr{V}$ y, en caso afirmativo, determinar las coordenadas de u respecto a $\mathscr{B}$.

    a) $u = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4 = \mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$
    b) $u = (1, 3, 4, 1) \in \mathbb{R}^4 = \mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \{(1, 2, 3, 0), (1, 3, 4, 0), (1, 3, 5, 1), (1, 3, 5, 2)\}$.
    c) $u = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.
    d) $u = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.
    e) $u = 1 + t + t^2 \in \mathbb{R}_2[t] = \mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + t + t^2\}$.
    f) $u = 1 + 4t + 5t^2 \in \mathbb{R}_2[t] = \mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \{1 + 2t + 3t^2, 1 + 3t + 4t^2, 1 + 2t + 4t^2\}$.
    g) $u = \begin{pmatrix} [1] & [0] \\ [1] & [1] \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) = \mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} [1] & [0] \\ [1] & [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] & [1] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] & [0] \\ [0] & [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] & [1] \\ [0] & [0] \end{pmatrix} \right\}$.
    h) $u = [1] + [4]t + [1]t^3 \in (\mathbb{Z}_5)_3[t] = \mathscr{V}$ y
    $\mathscr{B} = \{[1] + [2]t + [3]t^2, [1] + [3]t + [4]t^2, [1] + [2]t + [4]t^2 + [1]t^3, [1]t^2 + [2]t^3\}$.
    i) $u = \left(6 + 5t, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}_1[t] \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathscr{V}$ y

$$\mathscr{B} = \left\{ \left(1, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(t, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(1+t, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(1+t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(1+t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(1+t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \right\}.$$

    j) $u = (t + 2t^2, 2 + t) \in \mathbb{R}_2[t]^2 = \mathscr{V}$ y
    $\mathscr{B} = \{(1+2t+3t^2, 0), (1+3t+4t^2, 0), (1+2t+4t^2, 1), (t+2t^2, 2+t), (1+4t+5t^2, 1+t), (1+t, 1+t+t^2)\}$

17. [Independencia lineal (tipo finito)] Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes en los respectivos espacios vectoriales.

    a) $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$
    b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
    c) $\{1 + t, 1 - t^2, t^3, 2 + t - t^2\}$
    d) $\{(1 + t, 1 + t), (t, 1 + t), (1 + 2t, 2 + 2t)\}$.

18. Analizar, según los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, cuando los vectores

$$\{a + bt + t^2 + at^3, b + at + t^2 - bt^3, t^2 - t^3, t^2 + t^3\}.$$

    son linealmente independientes.

19. En $\mathbb{K}_n[t]$ se considera un conjunto de vectores $S = \{p_0(t), \ldots, p_n(t)\}$ tal que $\text{grado}(p_i) = i$ para $i = 0, \ldots, n$ y $p_0 \neq 0$. Demostrar que S es una base $\mathbb{K}_n[t]$. Como aplicación,

    a) Demostrar que todo polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ de grado m, se puede escribir de forma única como:

    $$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t(t-1) + \cdots + a_m t(t-1)(t-2)\cdots(t-m+1).$$

    donde $a_i \in \mathbb{K}$ (relacionar este resultado con la suma de series factoriales).

    b) Demostrar que para todo $a \in \mathbb{K}$, todo polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ de grado m, se puede escribir de forma única como:

    $$p(t) = a_0 + a_1(t-a) + \cdots + a_m(t-a)^m.$$

    donde $a_i \in \mathbb{K}$ (relacionar este resultado con el polinomio de Taylor).

20. [Independencia lineal en $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$] Analizar la independencia lineal de las siguientes funciones, en los intervalos indicados

    a) $I = [-1, 1], f_1(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}, f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ t^2 & \text{si } t \in (0, 1] \end{cases}$

    b) $\{t, |t|\}$ con $I = [0, +\infty)$.

    c) $\{t, |t|\}$ con $I = (-r, r)$.

    d) $\{\text{sen}(t), \cos(t)\}$ con $I = \mathbb{R}$.

    e) $\{t, t^2\}$ con $I = \mathbb{R}$.

    f) $\{te^t, e^{2t}\}$ con $I = \mathbb{R}$.

    g) $\{\text{sen}(t), \cos(t), e^t\cos(t)\}$ con $I = \mathbb{R}$.

    h) $\{e^t, te^t + t^2e^t\}$ con $I = (-1, 1)$.

    i) $\{t^2, t|t|\}$ con $I = [-1, 1]$.

21. [Manipulación de subespacios] En cada caso, determinar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de $\mathscr{W}_1$, $\mathscr{W}_2$, $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$ y $\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$; asimismo analizar si $\mathscr{V} = \mathscr{W}_1 \bigoplus \mathscr{W}_2$, donde $\mathscr{V}$ es el espacio vectorial ambiente.

    a) $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{W}_1 = \{(a, b, c) \,/\, a + b + c = 0\}$ y $\mathscr{W}_2 = L(\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$.

    b) $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{W}_1 = \{(a, b, c) \,/\, a = b = 0\}$ y $\mathscr{W}_2 = L(\{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 4, 5)\})$.

    c) $\mathscr{V} = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathscr{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{V} \,/ a + b + c + d = 0 \right\}$, $\mathscr{W}_2 = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

    d) $\mathscr{V} = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathscr{W}_1 = \{A \in \mathscr{V} \mid A = A^T\}$ $\mathscr{W}_2 = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

    e) $\mathscr{V} = \mathbb{R}_2[t], \mathscr{W}_1 = \{p(t) \in \mathscr{V} \mid p(1) = 0\}$, y $\mathscr{W}_2 = L(\{1, 1 + t^2\})$.

    f) $\mathscr{V} = \mathbb{R}_2[t], \mathscr{W}_1 = \{p(t) \in \mathscr{V} \mid p(0) + p'(0) = 0\}$, y $\mathscr{W}_2 = L(\{1 + t, 1 + t^2, 2, 2 + t + t^2\})$.

    g) $\mathscr{V} = \mathbb{R}_1[t] \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathscr{W}_1 = \{(p(t), A) \in \mathscr{V} \mid p(0) = 0 \,\text{y}\, \text{Traza}(A) = 0\}$ y
    $\mathscr{W}_2 = L\left(\left\{ \left(1 + t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right), \left(-1 - t, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \right\} \right)$.

    h) $\mathscr{V} = \mathbb{R}_1[t] \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathscr{W}_1 = \left\{ \left(a_0 + a_1 t, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) \mid a_0 + a_1 = 0, b_3 + b_4 = 0 \right\}$ y
    $\mathscr{W}_2 = L\left(\left\{ \left(1 + t, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \left(-1, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \right\} \right)$.

    i) $\mathscr{V} = (\mathbb{Z}_5)_2[t]$, $\mathscr{V}_1 = \{p(t) \in \mathscr{V} \mid p([1]) = [0]\}$ y $\mathscr{V}_2 = L(\{[2] + [3]t + [2]t^2\})$.

    j) $\mathscr{V} = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$, $\mathscr{W}_1 = \{A \in \mathscr{V} \mid \text{Traza}(A) = [0]\}$ $\mathscr{W}_2 = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} [2] & [2] \\ [0] & [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [1] & [1] \end{pmatrix} \right\} \right)$.

22. [Cambios de base]

   a) En $\mathscr{V} = \mathbb{R}^2$ se consideran las bases $\mathscr{B}_1 = \{(2,1),(-1,0)\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{(3,-1),(2,1)\}$.

   1) Hallar la matriz del cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_c$, de $\mathscr{B}_2$ a $\mathscr{B}_c$, de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ y de $\mathscr{B}_2$ a $\mathscr{B}_1$.
   2) Calcular las coordenadas del vector $(2,3)$ repecto a la base $\mathscr{B}_1$ y a la base $\mathscr{B}_2$.
   3) Sea v el vector de coordenadas $(-2,0)$ respecto a la base $\mathscr{B}_1$. Calcular las coordenadas de v respecto a $\mathscr{B}_c$ y a $\mathscr{B}_2$.

   b) En $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$ se consideran las bases $\mathscr{B}_1 = \{(1,0,1),(2,1,-1),(0,0,3)\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{(-1,1,0),(2,0,1),(3,-1,0)\}$.

   1) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$.
   2) Sabiendo que las coordenadas del vector $u = (6,2,3)$ en $\mathscr{B}_2$ son $(3,3,1)$, calcular sus coordenadas en $\mathscr{B}_1$.

   c) En $\mathscr{V} = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se considera la base

$$\mathscr{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \right\}.$$

   1) Hallar las matrices de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_c$ y de $\mathscr{B}_c$ a $\mathscr{B}_1$.
   2) Calcular las coordenadas en $\mathscr{B}_1$ de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   d) En $\mathscr{V} = \mathbb{R}_2[\,t\,]$ se considera la base $\mathscr{B}_1 = \{1-t, t+t^2, 2t+t^2\}$.

   1) Calcular las matrices de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_c$ y de $\mathscr{B}_c$ a $\mathscr{B}_1$.
   2) Dado el polinomio $p(t) = 2 + 3t + t^2$, determinar sus coordenadas en $\mathscr{B}_1$.

   e) En $\mathscr{V} = (R_1[t])^2$ se considera la base

$$\mathscr{B}_1 = \{(1,0),(1+t,0),(t,1),(0,1+t)\}$$

   1) Hallar las matrices de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_c$ y de $\mathscr{B}_c$ a $\mathscr{B}_1$.
   2) Calcular las coordenadas en $\mathscr{B}_1$ de $(2+t, 1+t)$.

23. Sean $\mathscr{W}_1 = L(\{(-1,0,0,1),(0,-1,-1,1),(0,1,-1,0)\})$, y $\mathscr{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + t = 0\}$. Se pide:

   a) Ecuaciones implícitas de $\mathscr{W}_1$ y paramétricas de $\mathscr{W}_2$.
   b) Dar bases de $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2, \mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$.
   c) Determinar para que valores del parámetro λ el vector $(\lambda, 1, 2-\lambda, 1)$ pertenece a $\mathscr{W}_1$.

24. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}_3[t]$ se considera el subespacio vectorial

$$W = L(\{t^3 + t^2 + t + 1, t^3 + t^2 + t, at^3 + t^2 + t + 1\}),$$

   donde $a \in \mathbb{R}$. Determinar la dimensión de W según los valores del parámetro a.

25. En el espacio vectorial $\mathscr{V} = \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se considera el subespacio vectorial $\mathscr{W}$ formado por todas las matrices triangulares superiores de $\mathscr{V}$. Determinar $\dim(\mathscr{W})$.

26. Estudiar si las funciones $\{e^x, xe^x, \ln(x)\}$ son linealmente independientes, como vectores del espacio vectorial $\mathscr{F}((0,+\infty),\mathbb{R})$.